E.S.I.M.

CONCOURS 1982

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, a est un nombre réel donné ($a > 0$), $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal d'un plan affine euclidien P, M le point de P tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, x et y étant des réels.

Dans I.3, P est immergé dans un espace affine euclidien orienté; on pose $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, de sorte que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal positif de cet espace.

I

I.1. On suppose que

$$\begin{cases} x = a(u - \sin u) \\ y = a(1 - \cos u) \end{cases}$$

lorsque u parcourt le segment $S = [0, \pi]$, M décrit un arc C_0.

I.1.*a*. On demande d'exprimer u en fonction du temps t ($t \geqslant 0$) de sorte que M soit en O à l'instant $t = 0$, et qu'il décrive C_0 d'un mouvement dont l'hodographe soit un arc, non réduit à un point, du cercle de centre $\Omega(x = 0, y = a)$ tangent en O à l'axe $(O; \vec{i})$.

(on rappelle que si $\overrightarrow{v(t)}$ est la vitesse de M à l'instant t, l'hodographe du mouvement de M est la trajectoire du point m tel que $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{v(t)}$.)

.../...

I.1.*b*. Les conditions de I.1.*a*. étant vérifiées, dessiner la trajectoire de M et l'hodographe de son mouvement sur une même figure.

I.1.*c*. Toujours dans les conditions du I.1.*a*., $\overrightarrow{\gamma(t)}$ étant l'accélération de M à l'instant t, soit μ le point tel que $\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{\gamma(t)}$. Former une équation polaire de la trajectoire de μ et construire cette trajectoire.

I.2. Soient I le centre de courbure de C_0 en M, J le centre de courbure de la développée Γ_0 de C_0 en I. Calculer les coordonnées cartésiennes de I et J, ainsi que la distance $\| \overrightarrow{MJ} \|$. Quelle relation existe-t-il entre les rayons de courbure de C_0 en M et de Γ_0 en I? Tracer sur une même figure C_0, Γ_0 et la développée de Γ_0.

I.3. O est l'origine des abscisses curvilignes sur C_0 supposé orienté dans le sens des u croissants. A tout point M de C_0 on associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{sk}$, s étant l'abscisse curviligne de M; M′ décrit un arc C_0'.

I.3.*a*. Calculer les rayons de courbure et de torsion de C_0' en M′.

I.3.*b*. Calculer les coordonnées du centre de courbure I′ de C_0' en M′ et vérifier que la distance $\| \overrightarrow{II'} \|$ s'exprime simplement en fonction de u.

I.3.*c*. On suppose que M décrive C_0 dans les conditions du I.1.*a*. Donner une représentation paramétrique de l'hodographe H du mouvement de M′, ainsi que les équations cartésiennes des projections orthogonales de H sur les trois plans d'équations : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Dessiner ces projections et reconnaître la nature de deux d'entre elles.

II

II.1. Soient f une application de classe $\mathcal{C}^3$ du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels dans lui-même, f', f'', f''' ses dérivées successives, θ un réel, D_θ la droite d'équation cartésienne :

$$x \cos\theta + y \sin\theta - f(\theta) = 0,$$

D_θ' la droite d'équation cartésienne :

$$-x \sin\theta + y \cos\theta - f'(\theta) = 0$$

et M_θ le point d'intersection de D_θ et D_θ'. Lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, M_θ décrit une courbe plane C. Quelles sont la tangente et la normale en M_θ à C?

Montrer que le point I_θ d'intersection de D_θ' et de la droite D_θ'' d'équation :

$$-x \cos\theta - y \sin\theta - f''(\theta) = 0$$

est le centre de courbure de C en M_θ.

N. B. — *On n'examinera pas le cas des points stationnaires.*

II.2. Soit J_θ le centre de courbure de la développée de C en I_θ ; exprimer $\| M_\theta J_\theta \|^2$ en fonction de $f(\theta)$, $f'(\theta)$, $f''(\theta)$ et $f'''(\theta)$. Déterminer toutes les fonctions f telles que : $(\forall\, \theta \in \mathbb{R})\ \| \overrightarrow{M_\theta J_\theta} \| = 4a$.

N. B. — On commencera par calculer $f(\theta) + f''(\theta)$ en fonction de θ et d'une constante arbitraire θ_0 telle que $f(\theta_0) + f''(\theta_0) = 0$ et $f'(\theta_0) + f'''(\theta_0) = 4a$.

II.3. Calculer en fonction de $\varphi = \theta - \theta_0$ les coordonnées du point M_θ décrivant une quelconque des courbes C telles que $(\forall\, \theta \in \mathbb{R})\ \| \overrightarrow{M_\theta J_\theta} \| = 4a$. Après avoir fait subir à C la rotation de centre O et d'angle θ_0, reconnaître par quelles transformations géométriques C peut se déduire de C_0.

III

Soit, dans P, un arc C orienté de classe $\mathcal{C}^3$, sans point stationnaire, sur lequel on a choisi une origine des abscisses curvilignes; en un point M de C, d'abscisse curviligne s, on désigne par $\vec{t}$ et $\vec{n}$ les vecteurs unitaires du repère de Frenet; α est l'angle polaire de $\vec{t}$. On sait qu'il existe une application de classe $\mathcal{C}^1$: $s \longrightarrow R$ de l'intervalle décrit par s dans l'ensemble des rayons de courbure de C, qui associe à s le rayon de courbure R de C en M; on notera $\frac{dR}{ds}$ la dérivée en s de cette application. Soient encore I le centre de courbure de C en M, R_1 le rayon de courbure en I de la développée Γ de C orientée de sorte que $\vec{n}$ soit le vecteur unitaire de la tangente orientée en I à Γ.

III.1. Montrer que $R_1 = R \frac{dR}{ds}$.

III.2. Soit J le centre de courbure de Γ en I. On cherche les courbes C telles que, pour tout point M de C, $\| \overrightarrow{MJ} \| = 4a$. On exprimera les coordonnées cartésiennes de M en fonction de $\varphi = \text{Arc sin} \frac{R}{4a}$ et on vérifiera que les courbes C se déduisent de C_0 par des isométries.

FIN

1431

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail